

Mathematik schriftlich

---

Hilfsmittel:	Formelsammlung DMK/DPK Taschenrechner TI-84		
Zeit:	vier Stunden, d.h. 240 Minuten		
Bewertung:	Aufgabe 1	16.5 Punkte	(1+4+4.5+1+3+3)
	Aufgabe 2	23 Punkte	(3+2+2+2+(5.5+2+2.5)+4)
	Aufgabe 3	8 Punkte	(3+3+2)
	Aufgabe 4	3.5 Punkte	
	Aufgabe 5	4 Punkte	
	Aufgabe 6	4 Punkte	
	Aufgabe 7	3 Punkte	(1+2)
	Aufgabe 8	11 Punkte	(3+2+1+2+3)
	Total	73 Punkte	

Für 60 oder mehr Punkte wird die Note 6 erteilt.

---

Der Lösungsweg wird mitbewertet.

Beim Einsatz des Taschenrechners müssen die verwendeten Parameter angegeben werden.

In der Analysis sind Ableitungs- und Stammfunktionen explizit anzugeben, um die volle Punktzahl zu erreichen.

Numerische Resultate sind mit vernünftiger Genauigkeit anzugeben.

Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1

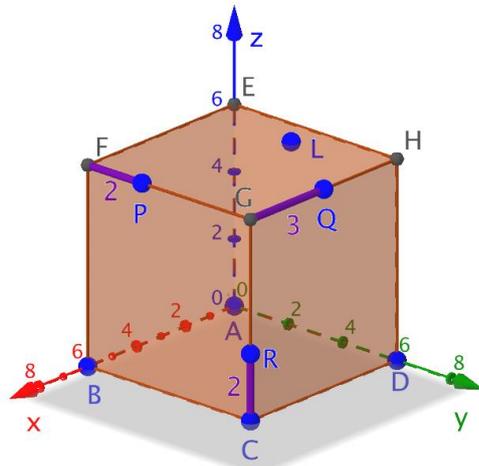
Gegeben sind die zwei Funktionen

$$f(x) = \sqrt{6x-8} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2}}.$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der beiden Funktionen.
- b) Zeigen Sie, dass die zwei Graphen sich im Punkt  $B(2/2)$  berühren.
- c) Berechnen Sie den Inhalt der von den Graphen und der  $x$ -Achse eingeschlossenen endlichen Fläche  $F$ .
- d) Geben Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente  $t$  an den Graphen im Punkt  $B$  an.
- e) In welchem Verhältnis teilt die gemeinsame Tangente  $t$  die Fläche  $F$ ?
- f) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche  $F$  um die  $x$ -Achse rotiert.

## Aufgabe 2

Ein Würfel  $ABCDEFGH$  mit Kantenlänge 6 ist, wie unten im Koordinatensystem eingezeichnet, gegeben. Die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  liegen auf den Kanten des Würfels und bestimmen eine Ebene  $W$ . Der Punkt  $L$  liegt auf der Deckfläche des Würfels.



- Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  und geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $W$  an.
- Berechnen Sie im Dreieck  $PQR$  den Winkel  $\alpha = \angle(QPR)$  bei der Ecke  $P$ .
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $PQR$ .
- Eine Pyramide wird mit dem Dreieck  $PQR$  als Grundfläche und mit  $G$  als Spitze gebildet. Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.

- Von der Lichtquelle  $L(1/3/6)$  geht ein Lichtstrahl  $l$  in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$  weg.

Er wird an der Ebene  $W$  reflektiert.

- Geben Sie den Reflexionspunkt  $T$  und eine Gleichung der Geraden an, auf welcher der reflektierte Lichtstrahl  $l'$  verläuft.
  - Geben Sie den Einfallswinkel  $\phi$  zwischen der Ebene  $W$  und dem Lichtstrahl  $l$  an.
  - Geben Sie den Punkt  $V$  an, in welchem der reflektierte Lichtstrahl  $l'$  den Würfel verlässt.
- Der Mittelpunkt einer Kugel liegt auf der Geraden durch  $A$  und  $G$ . Die Punkte  $L$  und  $C$  liegen auf der Oberfläche der Kugel. Geben Sie den Mittelpunkt  $M$  und den Radius  $r$  dieser Kugel an.

### Aufgabe 3

In der Eidgenössischen Verkehrszulassungsverordnung ist festgehalten, dass "Motorfahrzeugführer zu jeder Zeit Fähigkeiten haben und Verhaltensweisen zeigen müssen, die sie in die Lage versetzen, die Gefahren des Strassenverkehrs zu erkennen und deren Ausmass abzuschätzen".

Die entsprechenden Kompetenzen werden in einer Sammlung von Prüfungsfragen ausformuliert. Bei der theoretischen Fahrprüfung werden dem Kandidaten  $n$  zufällig ausgewählte Fragen vorgelegt. Im Folgenden bezeichne  $X$  die Anzahl korrekt beantworteter Fragen.

- a) Angenommen, ein Kandidat habe eine Erfolgswahrscheinlichkeit von  $p=90\%$  beim Beantworten derartiger Fragen. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeitswerte, wenn  $n=50$  Fragen geprüft werden.
- i)  $P(X = 45)$
  - ii)  $P(X \leq 45)$
  - iii)  $P(X > 45)$
- b) Die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  soll nicht kleiner als  $95\%$  sein. Die Prüfung stellt einen linksseitigen Test der Hypothese  $p < 0.95$  dar. Geben Sie die Entscheidungsregel zu diesem Hypothesentest mit  $n=40$  Fragen auf Signifikanzniveau (=Irrtumswahrscheinlichkeit)  $\alpha = 5\%$  an.
- c) Bei  $n=30$  Fragen müssen mindestens deren 27 korrekt beantwortet werden. Angenommen, ein Kandidat habe eine Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  von  $97.5\%$ . Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er die Prüfung dennoch *nicht* besteht.

### Aufgabe 4

Der Graph der Funktion  $f(x) = \frac{x+a}{x^2+bx+c}$ , die an der Stelle  $x=1$  nicht definiert ist, hat

im Punkt  $P(3/0)$  die Steigung  $m = \frac{1}{2}$ .

Bestimmen Sie den Wert der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

### Aufgabe 5

Welche Punkte des Graphen der Funktion  $h: y = \frac{4}{x}$  liegen am nächsten beim Ursprung?

### Aufgabe 6

Ein Blumenbeet soll die Form eines Rechtecks mit links und rechts angesetzten gleichseitigen Dreiecken haben.

Für die Umrandung stehen Begrenzungssteine mit einer Gesamtlänge von 20 m zur Verfügung.

Wie müssen die Masse gewählt werden, sodass die gesamte Fläche für das Blumenbeet maximal ist?

### Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich 1 rote und 99 schwarze Kugeln. Daraus wird jeweils eine Kugel zufällig gezogen und wieder zurückgelegt.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, in den ersten zehn Ziehungen mindestens einmal die rote Kugel zu ziehen.
- Bestimmen Sie die minimale Anzahl Ziehungen, sodass mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die rote Kugel gezogen wird.

### Aufgabe 8

In einer Urne befinden sich  $n$  Kugeln, davon  $r$  rote und  $s$  schwarze ( $n=r+s$ ). Daraus werden zwei Kugeln auf einmal gezogen.

Betrachten Sie folgende Ereignisse:

- A: die beiden Kugeln sind von derselben Farbe
- B: die beiden Kugeln sind von verschiedener Farbe

- Bestimmen Sie für  $r=2$ ,  $s=2$  das wahrscheinlichere der Ereignisse A und B.
- Bestimmen Sie  $P(A)$  und  $P(B)$  für allgemeines  $r$  und  $s$ .
- Weisen Sie nach, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten für  $r=3$ ,  $s=6$  übereinstimmen.
- Weisen Sie nach, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten genau dann übereinstimmen, wenn  $(r-s)^2 = n$
- Für  $r=3$  und  $s=6$  ist  $P(A)=P(B)$ , wie in Teil c) gezeigt wurde. Finden Sie drei weitere Paare  $(r,s)$  für welche die Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen.